Aplicaciones del Conjunto de Cantor

Aythami Bethencourt (ULL)
Elena Camacho (US)
Ángela Capel (UGR)
Pablo Jiménez (UCM)
Juan José Marín (UM)

Supervisado por Dr. José Pedro Moreno (UAM)

12 de abril de 2013
III Escuela-Taller de Análisis Funcional


WARMING UP. . .

El sorprendente espacio de Cantor

Definición

Denotaremos por $\mathbf{2}$ *al conjunto* $\{0,1\}$*, dotado de la topología discreta. El espacio de Cantor consiste en el conjunto* $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$*, dotado de la topología producto.*

El sorprendente espacio de Cantor

Los elementos de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ no son más que sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$x_n \in \{0,1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

El sorprendente espacio de Cantor

Los elementos de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ no son más que sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$x_n \in \{0,1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es no numerable.
- $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es compacto (T. Tychonoff).
- $\{y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : y(i) = x(i),\, 1 \leq i \leq n, \}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

El sorprendente espacio de Cantor

Los elementos de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ no son más que sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde

$$x_n \in \{0,1\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es no numerable.
- $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ es compacto (T. Tychonoff).
- $\{y \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \ : \ y(i) = x(i), \, 1 \leq i \leq n, \}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de entornos de $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$.

Además, el espacio de Cantor se puede identificar con un subconjunto del intervalo $[0,1]$ (que es al que se suele llamar conjunto de Cantor, y se denota por Δ), mediante el homeomorfismo definido por

$$\phi(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}, \ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}.$$

El sorprendente espacio de Cantor

Enunciamos algunas propiedades que nos serán de utilidad.

El sorprendente espacio de Cantor

Enunciamos algunas propiedades que nos serán de utilidad.

Nota

- *Un espacio métrico es II axioma, si y sólo si, es separable.*
- *Un espacio métrico compacto es separable.*
- *Todo subconjunto cerrado (no vacío) del espacio de Cantor es un retracto de éste.*


EL TEOREMA

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Teorema

Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Teorema

Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.

Demostración

Sea T un espacio métrico compacto.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Teorema

Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.

Demostración

Sea T un espacio métrico compacto.

Pasos de la demostración:

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Teorema

Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.

Demostración

Sea T un espacio métrico compacto.

Pasos de la demostración:

1. *T es imagen continua de un subconjunto cerrado del espacio de Cantor.*

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Teorema

Todo espacio métrico compacto es imagen continua del espacio de Cantor.

Demostración

Sea T un espacio métrico compacto.

Pasos de la demostración:

1. *T es imagen continua de un subconjunto cerrado del espacio de Cantor.*
2. *Todo subespacio cerrado no vacío del espacio de Cantor es un retracto.*

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sea $\{G_n\}$ *una base numerable de abiertos en* T.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sea $\{G_n\}$ *una base numerable de abiertos en* T.

$\forall n \in \mathbb{N}$, *definimos*

$$\Phi_n(0) = \overline{G_n}\ ,\ \Phi_n(1) = T \setminus G_n$$

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sea $\{G_n\}$ *una base numerable de abiertos en* T.

$\forall n \in \mathbb{N}$, *definimos*

$$\Phi_n(0) = \overline{G_n}\ ,\ \Phi_n(1) = T \setminus G_n$$

Entonces, $\forall x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, *consideramos*

$$E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_n)$$

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sea $\{G_n\}$ *una base numerable de abiertos en* T.

$\forall n \in \mathbb{N}$, *definimos*

$$\Phi_n(0) = \overline{G_n}\ ,\ \Phi_n(1) = T \setminus G_n$$

Entonces, $\forall x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, *consideramos*

$$E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_n)$$

Veamos que E_x *contiene, a lo sumo, un punto.*

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sean $x = (x_n) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *y* $a \in E_x$. *Consideramos* $b \neq a$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sean $x = (x_n) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *y* $a \in E_x$. *Consideramos* $b \neq a$.

Por ser T *Hausdorff, existe un entorno abierto de* a *cuya clausura no contiene a* b.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sean $x = (x_n) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *y* $a \in E_x$*. Consideramos* $b \neq a$*.*

Por ser T *Hausdorff, existe un entorno abierto de* a *cuya clausura no contiene a* b*.*

Consecuentemente, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a \in G_n$ *y* $b \notin \overline{G_n}$*.*

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sean $x = (x_n) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *y* $a \in E_x$. *Consideramos* $b \neq a$.

Por ser T Hausdorff, existe un entorno abierto de a cuya clausura no contiene a b.

Consecuentemente, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a \in G_n$ *y* $b \notin \overline{G_n}$.

Por tanto, $x_n = 0$ *y* $b \notin E_x$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sean $x = (x_n) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *y* $a \in E_x$. *Consideramos* $b \neq a$.

Por ser T *Hausdorff, existe un entorno abierto de* a *cuya clausura no contiene a* b.

Consecuentemente, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a \in G_n$ *y* $b \notin \overline{G_n}$.

Por tanto, $x_n = 0$ *y* $b \notin E_x$.

Sea $D := \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \, : \, E_x \neq \varnothing\}$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Sean $x = (x_n) \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ *y* $a \in E_x$. *Consideramos* $b \neq a$.

Por ser T *Hausdorff, existe un entorno abierto de* a *cuya clausura no contiene a* b.

Consecuentemente, $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $a \in G_n$ *y* $b \notin \overline{G_n}$.

Por tanto, $x_n = 0$ *y* $b \notin E_x$.

Sea $D := \{x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}} : E_x \neq \varnothing\}$.

Para cada $x \in D$, *como* E_x *consta de un solo punto, denotamos al mismo por* $f(x)$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

  $$\text{Sea } a \in T.\ \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a \in \Phi_n(0) \\ \vee \\ a \in \Phi_n(1) \end{cases}$$

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

  Sea $a \in T$. $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a \in \Phi_n(0) \\ \quad\vee \\ a \in \Phi_n(1) \end{cases}$

  Sea x_n tal que $a \in \Phi_n(x_n)$. Esto define un $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ tal que $a \in E_x \Rightarrow a = f(x)$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

  $$\text{Sea } a \in T.\ \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a \in \Phi_n(0) \\ \quad\vee \\ a \in \Phi_n(1) \end{cases}$$

  Sea x_n tal que $a \in \Phi_n(x_n)$. Esto define un $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ tal que $a \in E_x \Rightarrow a = f(x)$.
- *f continua*

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

  Sea $a \in T$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\{ \begin{array}{c} a \in \Phi_n(0) \\ \vee \\ a \in \Phi_n(1) \end{array} \right.$

  Sea x_n tal que $a \in \Phi_n(x_n)$. Esto define un $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ tal que $a \in E_x \Rightarrow a = f(x)$.

- *f continua*

  Sea U entorno abierto de $f(x)$ tal que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_n) \subseteq U$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

  Sea $a \in T$. $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a \in \Phi_n(0) \\ \quad\vee \\ a \in \Phi_n(1) \end{cases}$

  Sea x_n tal que $a \in \Phi_n(x_n)$. Esto define un $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ tal que $a \in E_x \Rightarrow a = f(x)$.

- *f continua*

  Sea U entorno abierto de $f(x)$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_n) \subseteq U$.

  T compacto y $\Phi_n(x_n)$ cerrado $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{N} \Phi_i(x_i) \subseteq U$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que f es una aplicación continua y sobreyectiva de D en T.

- *f sobreyectiva*

  Sea $a \in T$. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} a \in \Phi_n(0) \\ \qquad \vee \\ a \in \Phi_n(1) \end{cases}$

  Sea x_n tal que $a \in \Phi_n(x_n)$. Esto define un $x \in \mathbf{2}^{\mathbb{N}}$ tal que $a \in E_x \Rightarrow a = f(x)$.

- *f continua*

  Sea U entorno abierto de $f(x)$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x_n) \subseteq U$.

  T compacto y $\Phi_n(x_n)$ cerrado $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{N} \Phi_i(x_i) \subseteq U$.

  Si $y \in D$ con $y(i) = x(i)$ para $i \leq N \Rightarrow f(y) \in U$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que D es cerrado.

Tomamos $x \notin D \Rightarrow E_x = \varnothing$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que D es cerrado.

Tomamos $x \notin D \Rightarrow E_x = \varnothing$.

Por compacidad, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} \Phi_i(x_i) = \varnothing$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que D es cerrado.

Tomamos $x \notin D \Rightarrow E_x = \varnothing$.

Por compacidad, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} \Phi_i(x_i) = \varnothing$.

Si $y(i) = x(i)$ *para* $i \leq N$ $y \notin D$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que D es cerrado.

Tomamos $x \notin D \Rightarrow E_x = \varnothing$.

Por compacidad, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{N} \Phi_i(x_i) = \varnothing$.

Si $y(i) = x(i)$ para $i \leq N$ $y \notin D$.

Finalmente, como D es un retracto de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, $\exists r : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to D$ continua con $r|_D = Id_D$.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Veamos que D es cerrado.

Tomamos $x \notin D \Rightarrow E_x = \varnothing$.

Por compacidad, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{i=1}^{N} \Phi_i(x_i) = \varnothing$.

Si $y(i) = x(i)$ para $i \leq N$ $y \notin D$.

Finalmente, como D es un retracto de $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$, $\exists r : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to D$ continua con $r|_D = Id_D$.

Entonces, $f \circ r : \mathbf{2}^{\mathbb{N}} \to T$ es continua y sobreyectiva.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Nota

- *Cambio de "espacio métrico" por "compacto, Hausdorff y AN-II".*
  Teorema de Urysohn.

Teorema de Alexandroff-Hausdorff

Nota

- *Cambio de "espacio métrico" por "compacto, Hausdorff y AN-II".*
  Teorema de Urysohn.
- *Cardinalidad de espacio métricos compactos.*


WHAT FOR?

Curvas que llenan el espacio

Veremos ahora la existencia de una función $\overline{\phi} : [0,1] \to [0,1]^d$ continua y sobreyectiva.

Curvas que llenan el espacio

Veremos ahora la existencia de una función $\overline{\phi} : [0,1] \to [0,1]^d$ continua y sobreyectiva.

Demostración

Usando el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, existe una función continua $\phi : \Delta \to [0,1]^d$.
Ahora nos basta con extender ϕ *al intervalo* $[0,1]$ *de manera continua.*

Curvas que llenan el espacio

Veremos ahora la existencia de una función $\overline{\phi} : [0,1] \to [0,1]^d$ continua y sobreyectiva.

Demostración

Usando el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, existe una función continua $\phi : \Delta \to [0,1]^d$.

Ahora nos basta con extender ϕ *al intervalo* $[0,1]$ *de manera continua.*

A este fin, basta con observar que $[0,1] \setminus \Delta$ *es una unión numerable de intervalos disjuntos. Esto es,*

$$[0,1] \setminus \Delta = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

donde $I_k = (a_k, b_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Curvas que llenan el espacio

Extendemos ϕ por interpolación lineal en cada intervalo I_k.

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \Delta \\ t\phi(a_k) + (1-t)\phi(b_k), & x = ta_k + (1-t)b_k \in (a_k, b_k). \end{cases}$$

Curvas que llenan el espacio

Extendemos ϕ por interpolación lineal en cada intervalo I_k.

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \Delta \\ t\phi(a_k) + (1-t)\phi(b_k), & x = ta_k + (1-t)b_k \in (a_k, b_k). \end{cases}$$

Se observa que $\overline{\phi}([0,1]) \subset [0,1]^d$, pues $[0,1]^d$ es un convexo, y aquí termina la prueba.

Curvas que llenan el espacio

Extendemos ϕ por interpolación lineal en cada intervalo I_k.

$$\overline{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in \Delta \\ t\phi(a_k) + (1-t)\phi(b_k), & x = ta_k + (1-t)b_k \in (a_k, b_k). \end{cases}$$

Se observa que $\overline{\phi}([0,1]) \subset [0,1]^d$, pues $[0,1]^d$ es un convexo, y aquí termina la prueba.

Corolario

Sea K un conjunto convexo, compacto, metrizable, de un espacio vectorial topológico V. Entonces, existe una aplicación continua y sobreyectiva del $[0,1]$ en K.


EL OTRO
TEOREMA . . .

Teorema de Banach-Mazur

Definición

Decimos que un espacio de Banach, X, es **universal** *para una clase de espacios de Banach, $\mathcal{G}$, si todo elemento de $\mathcal{G}$ tiene una copia isométrica en X.*

Teorema de Banach-Mazur

Definición

Decimos que un espacio de Banach, X, es **universal** *para una clase de espacios de Banach, $\mathcal{G}$, si todo elemento de $\mathcal{G}$ tiene una copia isométrica en X.*

Ejemplo

ℓ_∞ *es universal para la clase de los espacios separables.*

Teorema de Banach-Mazur

Definición

Decimos que un espacio de Banach, X, es **universal** *para una clase de espacios de Banach, $\mathcal{G}$, si todo elemento de $\mathcal{G}$ tiene una copia isométrica en X.*

Ejemplo

ℓ_∞ *es universal para la clase de los espacios separables.*

Demostración

Y *separable,* $\{x_n\}$ *denso en* $\mathbb{S}_Y$, $x_n^* \in Y^*$ *con* $1 = \|x_n^*\| = x_n^*(x_n)$.

Teorema de Banach-Mazur

Definición

Decimos que un espacio de Banach, X, es **universal** *para una clase de espacios de Banach, $\mathcal{G}$, si todo elemento de $\mathcal{G}$ tiene una copia isométrica en X.*

Ejemplo

ℓ_∞ es universal para la clase de los espacios separables.

Demostración

Y *separable,* $\{x_n\}$ *denso en* $\mathbb{S}_Y$, $x_n^* \in Y^*$ *con* $1 = \|x_n^*\| = x_n^*(x_n)$.

$$x \to (x_n^*(x))_{n=1}^{\infty} \text{ es una isometría.}$$

Teorema de Banach-Mazur

¡Pero ℓ_∞ no es separable!

Teorema de Banach-Mazur

¡Pero ℓ_∞ no es separable!

¿Podemos encontrar algún espacio **separable** universal para los separables?

Teorema de Banach-Mazur

¡Pero ℓ_∞ no es separable!

¿Podemos encontrar algún espacio **separable** universal para los separables?

Necesitaremos:

Teorema de Banach-Mazur

¡Pero ℓ_∞ no es separable!

¿Podemos encontrar algún espacio **separable** universal para los separables?

Necesitaremos:

1. (B_{X^*}, ω^*) es compacto (Teorema de Alaoglu).

Teorema de Banach-Mazur

¡Pero ℓ_∞ no es separable!

¿Podemos encontrar algún espacio **separable** universal para los separables?

Necesitaremos:

1. (B_{X^*}, ω^*) es compacto (Teorema de Alaoglu).
2. (B_{X^*}, ω^*) es metrizable (ya que X es separable).

Teorema de Banach-Mazur

Teorema (Teorema de Banach-Mazur)

Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio de $C[0,1]$.

Teorema de Banach-Mazur

Teorema (Teorema de Banach-Mazur)

Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio de $C[0,1]$.

Demostración (Paso 1)

Todo espacio de Banach separable X *es linealmente isométrico a un subespacio de* $C(K)$, *para algún espacio* K *metrizable, convexo y compacto.*

Teorema de Banach-Mazur

Teorema (Teorema de Banach-Mazur)

Todo espacio de Banach separable es linealmente isométrico a un subespacio de $C[0,1]$.

Demostración (Paso 1)

Todo espacio de Banach separable X *es linealmente isométrico a un subespacio de* $C(K)$*, para algún espacio* K *metrizable, convexo y compacto.*

Demostremos que existe una isometría entre X *y un subespacio de* $C(K)$ *con* $K = B_{X^*}$.

Teorema de Banach-Mazur

Definimos la isometría J de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccc} J: & X & \longrightarrow & C(B_{X^*}) \\ & x & \to & \begin{array}{rccc} J(x): & B_{X^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \to & J(x)(f) = f(x) \end{array} \end{array}.$$

Teorema de Banach-Mazur

Definimos la isometría J de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccl} J: & X & \longrightarrow & C(B_{X^*}) \\ & x & \rightarrow & J(x): \begin{array}{ccl} B_{X^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightarrow & J(x)(f) = f(x) \end{array} \end{array}.$$

J está bien definida porque estamos usando en X^* la topología ω^*, que es la menos fina que hace continuos los elementos de X considerados como funciones de X^*. J es isometría:

Teorema de Banach-Mazur

Definimos la isometría J de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rccl} J: & X & \longrightarrow & C(B_{X^*}) \\ & x & \rightarrow & J(x): \begin{array}{ccl} B_{X^*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \rightarrow & J(x)(f) = f(x) \end{array} \end{array}.$$

J está bien definida porque estamos usando en X^* la topología ω^*, que es la menos fina que hace continuos los elementos de X considerados como funciones de X^*. J es isometría:

$$|J(x)(f)| \leq \|f\|_{X^*} \|x\|_X \leq \|x\|_X.$$

Teorema de Banach-Mazur

$$\|J(x)\|_{C(B_{X^*})} = \sup\{|J(x)(f)| \, : \, f \in B_{X^*}\} \leq \|x\|_X .$$

Teorema de Banach-Mazur

$$\|J(x)\|_{C(B_{X^*})} = \sup\{|J(x)(f)| \,:\, f \in B_{X^*}\} \leq \|x\|_X.$$

Dado $x \in X$, existe $f_x \in B_{X^*}$ con $f_x(x) = \|x\|_X$ (Teorema de Hahn-Banach).

Teorema de Banach-Mazur

$$\|J(x)\|_{C(B_{X^*})} = \sup\{|J(x)(f)| \,:\, f \in B_{X^*}\} \leq \|x\|_X.$$

Dado $x \in X$, existe $f_x \in B_{X^*}$ con $f_x(x) = \|x\|_X$ (Teorema de Hahn-Banach).

$$\|J(x)\|_{C(B_{X^*})} \geq J(x)(f_x) = \|x\|_X.$$

Teorema de Banach-Mazur

(Paso 2)

$C(K)$ *es linealmente isométrico a un subespacio de* $C[0,1]$.

Teorema de Banach-Mazur

(Paso 2)

$C(K)$ *es linealmente isométrico a un subespacio de* $C[0,1]$.
Por el Teorema de Alexandroff-Hausdorff y sus consecuencias, existe $\Phi : [0,1] \to K$ *continua y sobreyectiva.*

Teorema de Banach-Mazur

(Paso 2)

$C(K)$ es linealmente isométrico a un subespacio de $C[0,1]$.
Por el Teorema de Alexandroff-Hausdorff y sus consecuencias, existe $\Phi : [0,1] \to K$ continua y sobreyectiva.
Definimos

$$\begin{array}{rccccc} S: & C(K) & \longrightarrow & C[0,1] & & \\ & f & \to & S(f): & [0,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & & t & \to S(f)(t) = f(\Phi(t)) \end{array}.$$

$$\begin{aligned} \|S(f)\|_{C[0,1]} &= \sup\{|f(\Phi(t)) \;:\; t \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|f(k)| \;:\; k \in K\} \\ &= \|f\|_{C(K)} \end{aligned}$$

Teorema de Banach-Mazur

Corolario

$C(K)$ *separable si y sólo si* K *es metrizable.*

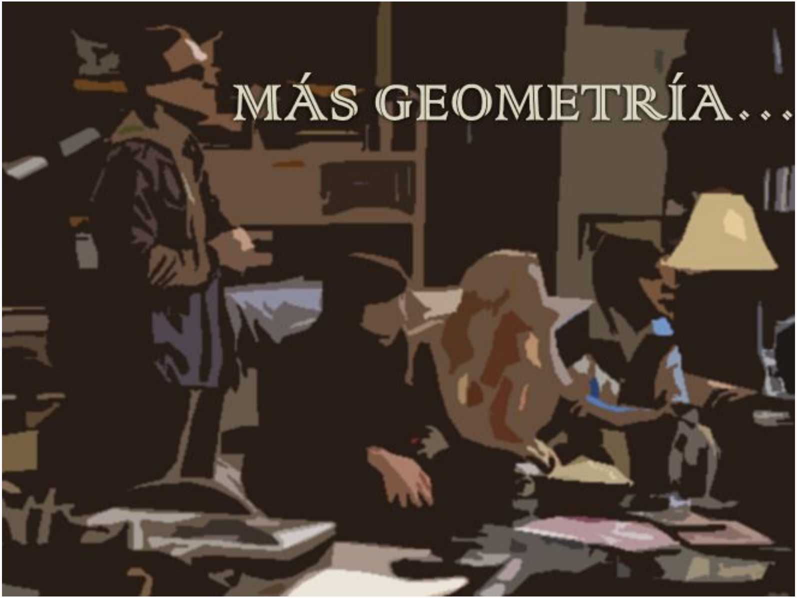
Teorema de Banach-Mazur

Corolario

$C(K)$ separable si y sólo si K es metrizable.

Nota

$\beta\mathbb{N}$ no es metrizable, puesto que $C(\beta\mathbb{N})$ es isométrico a ℓ_∞.


MÁS GEOMETRÍA...

Un conjunto convexo universal

Definición

Dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^d$ se dicen congruentes si uno de ellos es la imagen mediante una isometría afín de $\mathbb{R}^d$ del otro.

Un conjunto convexo universal

Definición

Dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^d$ se dicen congruentes si uno de ellos es la imagen mediante una isometría afín de $\mathbb{R}^d$ del otro.

Definición

Diremos que un hiperplano H de $\mathbb{R}^d$ soporta un conjunto convexo compacto B si B está contenido en uno de los dos espacios cerrados que determina H y además $B \cap H \neq \varnothing$. En ese caso, decimos que $B \cap H$ es una cara de B.

Un conjunto convexo universal

Definición

Dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^d$ *se dicen congruentes si uno de ellos es la imagen mediante una isometría afín de* $\mathbb{R}^d$ *del otro.*

Definición

Diremos que un hiperplano H *de* $\mathbb{R}^d$ *soporta un conjunto convexo compacto* B *si* B *está contenido en uno de los dos espacios cerrados que determina* H *y además* $B \cap H \neq \varnothing$. *En ese caso, decimos que* $B \cap H$ *es una cara de* B.

Nota

Equivalentemente a la definición anterior, si H *se representa de la forma* $H = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = \alpha\}$ *con* f *un funcional lineal de* $\mathbb{R}^d$ *y* $\alpha \in \mathbb{R}$ *entonces* H *soporta a* B *si* $\max\{f(x) : x \in B\} = \alpha$ *o* $\min\{f(x) : x \in B\} = \alpha$.

Un conjunto convexo universal

¿Existe un conjunto convexo y compacto $B \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que cada subconjunto convexo bidimensional del cuadrado unidad sea congruente con una de sus caras?

Un conjunto convexo universal

¿Existe un conjunto convexo y compacto $B \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que cada subconjunto convexo bidimensional del cuadrado unidad sea congruente con una de sus caras?

La respuesta a nuestra pregunta es **no**:

Un conjunto convexo universal

¿Existe un conjunto convexo y compacto $B \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que cada subconjunto convexo bidimensional del cuadrado unidad sea congruente con una de sus caras?

La respuesta a nuestra pregunta es **no**:

- El interior de cada cara bidimensional de B es abierto en la frontera bidimensional de B, por tanto, B puede tener a lo sumo una cantidad numerable de caras.

Un conjunto convexo universal

¿Existe un conjunto convexo y compacto $B \subset \mathbb{R}^3$ con la propiedad de que cada subconjunto convexo bidimensional del cuadrado unidad sea congruente con una de sus caras?

La respuesta a nuestra pregunta es **no**:

- El interior de cada cara bidimensional de B es abierto en la frontera bidimensional de B, por tanto, B puede tener a lo sumo una cantidad numerable de caras.
- Hay una cantidad no numerable de subconjuntos compactos convexos del cuadrado unidad no congruentes entre sí.

Un conjunto convexo universal

Sin embargo, si buscamos un conjunto universal de dimensión 4 para conjuntos bidimensionales el argumento topológico anterior no es válido. De hecho, R. Grzaslewicz probó el siguiente teorema.

Teorema

Para cada $d \geq 1$ existe un conjunto compacto convexo $B \subset \mathbb{R}^{d+2}$ con la propiedad de que cada subconjunto compacto convexo d-dimensional del cubo unidad es congruente a una cara de B.

Un conjunto convexo universal

Sin embargo, si buscamos un conjunto universal de dimensión 4 para conjuntos bidimensionales el argumento topológico anterior no es válido. De hecho, R. Grzaslewicz probó el siguiente teorema.

Teorema

Para cada $d \geq 1$ existe un conjunto compacto convexo $B \subset \mathbb{R}^{d+2}$ con la propiedad de que cada subconjunto compacto convexo d-dimensional del cubo unidad es congruente a una cara de B.

Demostración (Caso d=1)

- *Representaremos los puntos de $\mathbb{R}^3$ como pares (t, x) con $t \in \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}$.*

Un conjunto convexo universal

Sin embargo, si buscamos un conjunto universal de dimensión 4 para conjuntos bidimensionales el argumento topológico anterior no es válido. De hecho, R. Grzaslewicz probó el siguiente teorema.

Teorema

Para cada $d \geq 1$ existe un conjunto compacto convexo $B \subset \mathbb{R}^{d+2}$ con la propiedad de que cada subconjunto compacto convexo d-dimensional del cubo unidad es congruente a una cara de B.

Demostración (Caso d=1)

- *Representaremos los puntos de $\mathbb{R}^3$ como pares (t, x) con $t \in \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}$.*
- *Denotamos por $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$. Sabemos que existe una función $f : \mathbb{S}^1 \to [0, 1]$ continua y sobreyectiva.*

Un conjunto convexo universal

(Caso d=1)

- *Definiremos* $G = \{(t, x) : t \in \mathbb{S}^1 \quad y \quad 0 \leq x \leq f(t)\}$, *que es compacto.*

Un conjunto convexo universal

(Caso d=1)

- *Definiremos* $G = \{(t, x) : t \in \mathbb{S}^1 \quad y \quad 0 \leq x \leq f(t)\}$, *que es compacto.*
- *Llamaremos* B *a la envolvente convexa de* G, *que es compacta por ser la envolvente convexa de un compacto en un espacio de dimensión finita.*

Un conjunto convexo universal

(Caso d=1)

- *Definiremos* $G = \{(t, x) : t \in \mathbb{S}^1 \quad y \quad 0 \leq x \leq f(t)\}$*, que es compacto.*
- *Llamaremos* B *a la envolvente convexa de* G*, que es compacta por ser la envolvente convexa de un compacto en un espacio de dimensión finita.*
- *El conjunto* B *verifica la condición del teorema. Los conjuntos convexos compactos de* $[0, 1]$ *son los intervalos de longitud* $0 \leq l \leq 1$*. Pero fijada una longitud* l*, existe* $t_0 \in \mathbb{S}^1$ *tal que* $f(t_0) = l$*. Entonces* $F = \{(t_0, y) : 0 \leq y \leq f(t_0)\}$ *es una cara de* B *y un intervalo de longitud* l*.*

Un conjunto convexo universal

(Caso general)

La prueba para el caso general es análoga pero además hace uso de:

Un conjunto convexo universal

(Caso general)

La prueba para el caso general es análoga pero además hace uso de:

- *La métrica de Hausdorff. Si A y B son dos conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ y definimos $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \, : \, dist(x, A) < \epsilon\}$,*

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \, : \, B \subseteq A_\epsilon \text{ y } A \subseteq B_\epsilon\}.$$

Un conjunto convexo universal

(Caso general)

La prueba para el caso general es análoga pero además hace uso de:

- *La métrica de Hausdorff. Si A y B son dos conjuntos compactos de $\mathbb{R}^d$ y definimos $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ dist(x, A) < \epsilon\}$,*

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \ : \ B \subseteq A_\epsilon \ y \ A \subseteq B_\epsilon\}.$$

- *El teorema de Selección de Blaschke. El conjunto de los subconjuntos compactos y convexos de un compacto de $\mathbb{R}^d$ es compacto con la métrica de Hausdorff.*

Un conjunto convexo universal

(Caso general)

Aplicando el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, existe una aplicación continua y sobreyectiva $\Phi : \Delta \to K$, donde K es el conjunto de los subconjuntos compactos y convexos del cubo unidad d-dimensional.

Un conjunto convexo universal

(Caso general)

Aplicando el Teorema de Alexandroff-Hausdorff, existe una aplicación continua y sobreyectiva $\Phi : \Delta \to K$*, donde* K *es el conjunto de los subconjuntos compactos y convexos del cubo unidad d-dimensional.*

Consideraremos en este caso que Δ *es un subconjunto cerrado de* T*. Tomando el conjunto*

$$G = \{(t, x) : t \in \Delta \text{ y } x \in \Phi(t)\}$$

y B *como su envolvente convexa, obtenemos el conjunto deseado al igual que en el caso particular.*


INTERPOLATION...

Función que interpola sucesiones acotadas

Teorema

Existe una función f acotada, continua y de variable real, en la recta real $\mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada sucesión doblemente infinita $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números reales con $|y_n| \leq 1$ para todo n, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_n = f(t+n) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Función que interpola sucesiones acotadas

Teorema

Existe una función f acotada, continua y de variable real, en la recta real $\mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada sucesión doblemente infinita $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números reales con $|y_n| \leq 1$ para todo n, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_n = f(t+n) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración

Sea $K = [-1,1]^{\mathbb{Z}}$ (compacto con la topología producto y metrizable).

Función que interpola sucesiones acotadas

Teorema

Existe una función f acotada, continua y de variable real, en la recta real $\mathbb{R}$ con la propiedad de que para cada sucesión doblemente infinita $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de números reales con $|y_n| \leq 1$ para todo n, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$y_n = f(t+n) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Demostración

Sea $K = [-1,1]^{\mathbb{Z}}$ (compacto con la topología producto y metrizable).
Sea Φ una función continua sobreyectiva del conjunto de Cantor Δ sobre K. $(\Phi(\cdot))_n$ es una función de variable real continua y acotada en valor absoluto por 1.

Función que interpola sucesiones acotadas

Identificamos Δ *como subconjunto cerrado de* $[0, 1/2]$. *Entonces, definimos* g *sobre el conjunto cerrado* $A = \cup\{\Delta + n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ *de* $\mathbb{R}$ *como*

$$g(t+n) = (\Phi(t))_n, \quad \text{para } t \in \Delta \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Función que interpola sucesiones acotadas

Identificamos Δ *como subconjunto cerrado de* $[0, 1/2]$. *Entonces, definimos* g *sobre el conjunto cerrado* $A = \cup\{\Delta + n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ *de* $\mathbb{R}$ *como*

$$g(t+n) = (\Phi(t))_n, \quad \text{para } t \in \Delta \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Como g *está bien definida y es continua, la extendemos por el Teorema de extensión de Tietze a una función continua y acotada en* $\mathbb{R}$ f.

Función que interpola sucesiones acotadas

Identificamos Δ *como subconjunto cerrado de* $[0, 1/2]$. *Entonces, definimos* g *sobre el conjunto cerrado* $A = \cup\{\Delta + n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ *de* $\mathbb{R}$ *como*

$$g(t+n) = (\Phi(t))_n, \quad \text{para } t \in \Delta \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Como g *está bien definida y es continua, la extendemos por el Teorema de extensión de Tietze a una función continua y acotada en* $\mathbb{R}$ f.

¡f *es la función buscada!*

Función que interpola sucesiones acotadas

Identificamos Δ *como subconjunto cerrado de* $[0,1/2]$. *Entonces, definimos* g *sobre el conjunto cerrado* $A = \cup\{\Delta + n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}$ *de* $\mathbb{R}$ *como*

$$g(t+n) = (\Phi(t))_n, \quad \text{para } t \in \Delta \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

Como g *está bien definida y es continua, la extendemos por el Teorema de extensión de Tietze a una función continua y acotada en* $\mathbb{R}$ f.

¡f *es la función buscada!*

En efecto, dado $y = (y_n) \in K$ *existe un* $t_0 \in \Delta$ *tal que* $\Phi(t_0) = y$, *es decir,* $(\Phi(t_0))_n = y_n \forall n$. *La definición de* f *asegura que* $f(t_0 + n) = y_n \forall n$.


BASADO EN . . .

Yoav Benyamini, *Applications of the Universal Surjectivity of the Cantor Set*, Amer. Math. Monthly, , vol. 05, n. 9, 832-839.

N. L. Carothers, *A Short Course on Banach Space Theory*, Cambridge University Press, 2005.

Grahm James Oscar Jameson, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, 1974.

- Todos los personajes que aparecen en este trabajo son ficticios. Cualquier parecido con la realidad es pura coincidencia.

- Todos los personajes que aparecen en este trabajo son ficticios. Cualquier parecido con la realidad es pura coincidencia.
- Ningún teorema ha sido maltratado durante la realización de esta presentación.

- Todos los personajes que aparecen en este trabajo son ficticios. Cualquier parecido con la realidad es pura coincidencia.
- Ningún teorema ha sido maltratado durante la realización de esta presentación.

¡GRACIAS POR SU ATENCIÓN!